

Алгоритмические методы и комбинаторика слов в теории колец (Черновик)

М.И. Харитонов ¹

- Приведённые ниже факты отдельно доказывались для ϵ - и Lie - алгебр, но доказательства и формулировки для различных типов алгебр похожи, поэтому ниже приведена попытка объединения формулировок.

А.И. Ширшов ввёл и доказал следующие понятия и теоремы:

Определение Слова длины 1 назовем Ω -правильными ($\Omega = K, AK, Lie$) словами и произвольно упорядочим. Считая, что Ω -правильные слова, длина которых меньше n , $n > 1$, уже определены и упорядочены каким-то способом так, что слова меньшей длины предшествуют словам большей длины, назовем слово w длины n Ω -правильным, если

1. $w = uv$, где u, v — Ω -правильные слова;
2. $u \geq v$ при $\Omega = K$ и $u > v$ при $\Omega = AK, Lie$;
3. (Только для $\Omega = Lie$) если $u = u_1 u_2$, то $u \leq v$.

Теорема 1. Правильные слова образуют базис свободной Ω -алгебры.

Теорема 2. Всякая подалгебра Ψ свободной Ω -алгебры Φ свободна.

Проблема тождества для Ω -алгебр. Существует ли алгоритм, который для произвольного конечного множества S и произвольного элемента a из Ω -алгебры позволяет выяснить, принадлежит ли a идеалу $\langle S \rangle$.

Теорема о тождестве 1. Пусть S — некоторое фиксированное множество элементов свободной Ω -алгебры E . Тогда существует алгоритм, позволяющий за конечное число шагов определить, принадлежит ли произвольный элемент $t \in E$ идеалу $\langle S \rangle$.

Следствие. Существует алгоритм, решающий проблему тождества для алгебр Ли с одним определяющим соотношением.

Теорема о тождестве 2. Существует алгоритм, решающий проблему тождества для алгебр Ли с однородными множествами определяющих соотношений.

Теорема о свободе. Пусть E_0 — Ω -алгебра с множеством порождающих R и одним определяющим соотношением $s = 0$, в левую часть которого входит образующий a_α . Тогда подалгебра E'_0 , порождённая в алгебре E_0 множеством $R \setminus a_\alpha$, свободна.

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [6].

- Проблема Куроша-Левицкого для конечно порождённых
 - ниль-алгебр конечного ниль-индекса
 - алгебр конечного индекса

¹М. И. Харитонов. E-mail: mikhaikharonov@yandex.ru

Теорема Ширшова о высоте. Множество всех не n -разбиваемых слов в конечно порождённой алгебре с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту H над множеством слов степени не выше $n - 1$.

Литература: [15], [6], [16].

- **Определение.** Ассоциативное слово называется *правильным*, если оно лексикографически больше любого своего циклического сдвига.

Неассоциативное слово называется *правильным*, если оно правильное в ассоциативном смысле и

- если $[u] = [[v][w]]$, то v и w – правильные слова,
- если $[u] = [[v_1][v_2]][w]$, то $v_2 \leq w$.

Теорема Ширшова. В правильном в ассоциативном смысле слове существует единственный способ расставить Лиевы скобки так, чтобы полученное слово было правильным в неассоциативном смысле.

Правильные слова образуют базис свободной алгебры Ли.

Литература: [6], [16], [3], [12].

- **Определение.** Назовём слово *полуправильным*, если любой его конец либо лексикографически меньше a , либо является началом a .

Теорема. Любое бесконечное слово над конечным алфавитом содержит подслово fgf , где f – полуправильное, а g – правильное (возможно, пустое) слово.

Литература: [6], [12].

- **Теорема Ван дер Вардена.** Пусть n и k – натуральные числа, последовательность натуральных чисел разбита на k множеств. Тогда найдётся число $f(n, k)$ такое, что среди первых $f(n, k)$ натуральных чисел найдётся арифметическая прогрессия длины n из одного множества.

Многомерное обобщение для фигур и гомотетии с положительным коэффициентом.

Литература: [17], [18].

- **Определение.** Группа удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, когда общая часть любых двух порождающих соотношений меньше, чем λ , умноженное на длину любого из них.

Лемма Гриндлингера. В карте, удовлетворяющей условию $C'(\frac{1}{6})$, найдётся клетка, большая часть границы которой лежит на границе карты.

Алгебраическая формулировка с группами и соотношениями.

Алгоритм Дена-Гриндлингера определения тривиальности группового слова в группе с конечным числом соотношений.

Литература: [7], [8].

- **Теорема Реева.** Если алгебры A и B удовлетворяют полиномиальному тождеству, то алгебра $A \otimes_F B$ также удовлетворяет полиномиальному тождеству.

Литература: [19], [20].

- **Diamond-lemma.** Пусть M – ЧУМ, в котором любая убывающая цепь – конечна.

Определение. Отношение Чёрча-Россера: $x \rightsquigarrow y$, если у x и y есть общий потомок.

Представим M в виде графа Ньюмана с множеством рёбер R . Тройка (M, \leq, R) называется *схемой симплификации*. Следующие условия эквивалентны:

1. M – обладает свойством каноничности (т.е. у каждого $m \in M$ нормальная форма единственна).
2. Отношение Чёрча-Россера – транзитивно.
3. Выполняется условие локального слияния (“у любых двух братьев есть общий потомок”).
4. В любой компоненте связности лежит ровно один минимальный элемент.
5. $(x \sim y, \text{ т.е. между } x \text{ и } y \text{ есть неориентированный путь}) \iff (x \rightsquigarrow y)$.

Определение. Введём на мономах X^* линейный порядок $<$ такой, что для любого монома $z \in X^*$ имеет место $x < y \Rightarrow xz < yz$. Базис Грёбнера-Ширшова некоторого идеала $I \triangleleft k\langle X \rangle$ – это конечное множество полиномов G , порождающее идеал I , причём старший моном \bar{h} любого полинома $h \in I$ делится на некоторый старший моном \bar{g} полинома из базиса Грёбнера-Ширшова.

Элемент h обладает *H -представлением* относительно системы порождающих G , если в представлении $h = \sum \alpha_i u_i g_i v_i$ любой моном $u_i \bar{g}_i v_i$ не больше, чем \bar{h} .

Определим для полинома $f \in k\langle X \rangle$ его $\text{supp}(f)$ – упорядоченное множество составляющих его мономов. Тогда лексикографический порядок на суппортах полиномов индуцирует частичный порядок \leq_{supp} на полиномах $k\langle X \rangle$.

Теорема. Следующие условия эквивалентны.

1. G – базис Грёбнера-Ширшова I .
2. Любой элемент I редуцируется относительно G к нулю.
3. Любой $h \in I$ обладает H -представлением относительно G .
4. Схема $(k\langle X \rangle, \leq_{\text{supp}}, R_G)$ обладает свойством каноничности.

Литература: [9], [10], [11].

- **Теорема (Туэ – 1).** Пусть $X = \{a, b\}$, подстановка ϕ задана соотношениями $\phi(a) = ab, \phi(b) = ba$. Тогда если слово $w \in X^*$ – бескубное, то и $\phi(w)$ – бескубное.

Теорема (Туэ – 2). Пусть $X = \{a, b, c\}$, подстановка ϕ задана соотношениями $\phi(a) = abcab, \phi(b) = acabcb, \phi(c) = acbcacb$. Тогда если слово $w \in X^*$ – бесквадратное, то и $\phi(w)$ – бесквадратное.

Теорема (Туэ – 3). Пусть M и N – алфавиты, для подстановки $\phi : M \rightarrow N^*$ и выполнены следующие условия:

1. если длина w не больше 3, то $\phi(w)$ – бесквадратное;
2. если a, b – буквы алфавита M , а $\phi(a)$ – подслово $\phi(b)$, то $a = b$.

Тогда если слово $w \in M^*$ – бесквадратное, то и $\phi(w)$ – бесквадратное.

Теорема (Крошмор). Пусть ϕ – подстановка, M – наибольший размер блока, m – минимальный размер блока, $k = \max\{3, 1 + [(M-3)/m]\}$. Тогда подстановка ϕ – бесквадратная в том и только в том случае, когда для любого бесквадратного слова w длины $\leq k$ слово $\phi(w)$ будет бесквадратным.

Литература: [7].

- **Определение.** Алгебра называется *мономиальной*, если в ней есть базис определяющих соотношений вида $s = 0$, где s — слово от образующих алгебры.

Конечным автоматом (КА) с алфавитом X входных символов называется ориентированный граф, в котором выделено два (возможно пересекающиеся) множества вершин, называемых *начальными* и *финальными (конечными)* и каждое ребро помечено буквой из конечного алфавита X . Язык L называется *регулярным* или *автоматным*, если существует конечный автомат, допускающий слова из множества L и только их.

Автомат называется *детерминированным*, если

1. начальная вершина ровно одна;
2. из любой его вершины не может выходить более одного ребра, помеченного одной и той же буквой;
3. нет ребер, помеченных пустой цепочкой.

Предложение. для всякого недетерминированного КА существует детерминированный КА, допускающий то же самое множество слов.

Определение. Алгебра A называется *автоматной*, если множество ее ненулевых слов от образующих A является регулярным языком.

Предложение. Конечно определенная мономиальная алгебра является автоматной.

Определение. *Функция роста* $V_A(n)$ алгебры A — это размерность пространства, порожденного словами длины не выше n .

Если следующий предел существует, то его значение называется *размерностью Гельфанда—Кириллова* алгебры A и обозначается $GK(A)$:

$$GK(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(V_A(n))}{\ln(n)}.$$

Пусть $\Gamma(A)$ — минимальный детерминированный граф автоматной алгебры A . Назовем вершину графа *циклической*, если существует путь, начинающийся и заканчивающийся в этой вершине. Назовем вершину *дважды циклической*, если существуют два различных пути, начинающихся и заканчивающихся в этой вершине и не проходящих ни через одну другую вершину дважды.

Пусть граф Γ не имеет дважды циклических вершин. Назовем *цепью* подграф графа Γ , состоящий из последовательности ребер, в которой конец предыдущего ребра является началом следующего, и никакая вершина не встречается

дважды. Назовем *простым графом* подграф графа Γ , состоящий из конечно-го числа циклов, занумерованных числами $1, 2, \dots, d$, причем пары соседних циклов с номерами $i, i + 1$ соединены ровно одной цепью, направленной от i -го к $(i + 1)$ -му циклу. В первый цикл может входить одна цепь, и из последнего также может выходить одна цепь.

Теорема (Уфнаровский). Пусть A — автоматная алгебра, $\Gamma(A)$ — ее минимальный детерминированный граф.

1. Если $\Gamma(A)$ имеет вершину, принадлежащую двум различным циклам, то A имеет экспоненциальную функцию роста.
2. Если $\Gamma(A)$ не имеет дважды циклических вершин, то A имеет степенную функцию роста. Степень роста (размерность Гельфанда—Кириллова) равна количеству циклов в максимальном простом подграфе, содержащемся в $\Gamma(A)$.

Теорема. Пусть граф автоматной мономиальной алгебры A не имеет вершин, принадлежащих двум циклам. Тогда A вкладывается в алгебру матриц над полем.

Следствие. Пусть A — автоматная мономиальная алгебра, $\Gamma(A)$ — ее минимальный детерминированный граф. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\Gamma(A)$ не имеет дважды циклических вершин;
2. алгебра A имеет степенной рост;
3. алгебра A имеет не экспоненциальный рост;
4. алгебра A представима матрицами над полем;
5. в A выполняется полиномиальное тождество.

Литература: [6], [7], [12], [13], [14].

Список литературы

- [1] Ширшов А. И. *Подалгебры свободных левых алгебр*. Матем. сб., **33(75)**:2 (1953), 441–452.
- [2] Ширшов А. И. *Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр*. Матем. сб., **34(76)**:1 (1954), 81–88.
- [3] Ширшов А. И. *О свободных алгебрах Ли*. Мат. сб., 1958, Т. 45(87), № 2, стр. 113 – 122.
- [4] Ширшов А. И. *Некоторые алгоритмические проблемы для ϵ -алгебр*. Сиб. матем. ж., 3, №1 (1962), 132 – 137.
- [5] Ширшов А. И. *Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли*. Сиб. матем. ж., 3, №2 (1962), 292 – 296.
- [6] Belov, A.Ya., Borisenko, V.V., and Latyshev, V.N. *Monomial algebras*. Algebra 4, J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 3, 3463 – 3575.
- [7] Sapir M. *Non-commutative combinatorial algebra*. 2014.
- [8] Клячко А.А. *Спецкурс по теории групп*. 2009.
- [9] Латышев В. Н. *ЕНС Прикладные проблемы алгебры*. 2012.
- [10] George M. Bergman. *The Diamond Lemma for Ring Theory*. Advances in mathematics, 29, 178–218 (1978).
- [11] Beidar K. I., Martindale W. S. III, Mikhalev A. V. *Rings with generalized identities*. Pure and applied mathematics, 1995.
- [12] Уфнаровский В.А. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре*. ВИНТИ, 1989.
- [13] wiki:ru *Минимальная форма автомата*.
- [14] wiki:ru *Диаграмма состояний (теория автоматов)*.
- [15] Курош А. Г. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах*. Изв. АН СССР, Сер. Матем., 5(1941), 233 – 240.
- [16] Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П. и Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным*. Современная алгебра, Москва, 1978.
- [17] Бугаенко В.О. *Обобщённая теорема Ван дер Вардена*. Москва, МЦНМО, 2006.
- [18] Хинчин А.Я. *Три жемчужины теории чисел*. Москва, Наука, 1979.
- [19] Regev A. *Existence of polynomial identities in $A \otimes_F B$* Bull. Amer. Math. Soc. 77:6 (1971), 1067 – 1069.
- [20] Latyshev V.N. *On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras*. Uspehi Mat. Nauk. **27** (1972), 213–214.